

Е.А. Краснопевцев

(г. Новосибирск, Новосибирский государственный технический университет)

E.A. Krasnopevtsev (Novosibirsk, Novosibirsk State Technical University)

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

CORRELATION INTERACTIONS OF QUANTUM PARTICLES

Корреляция числа частиц в равновесном тепловом состоянии квантового газа вызвана взаимным «интерференционным отталкиванием» и антигруппировкой у фермионов и «интерференционным притяжением» и группировкой у бозонов.

Correlation of particles number in an equilibrium thermal state of quantum gas is caused mutual «interference repulsion» and antibunching at fermions and «interference attraction» and bunching at bosons.

Ключевые слова: дисперсия, корреляция, интерференционное взаимодействие, бозон, фермион.

Keywords: dispersion, correlation, interference interaction, boson, fermion.

1. Correlation of particles number

System of n particles in one state we divide mentally on two subsystems $i = 1, 2$

$$n = n_1 + n_2, \quad \bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2.$$

Using a deviation from average $\Delta n_i \equiv n_i - \bar{n}_i$, we find a dispersion of particles number in a subsystem $D_i \equiv \overline{(\Delta n_i)^2} = \overline{n_i^2} - \bar{n}_i^2$ and in all system

$$D \equiv \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{[(n_1 - \bar{n}_1) + (n_2 - \bar{n}_2)]^2} = D_1 + D_2 + C, \quad (1)$$

where correlations between fluctuations of particles number in subsystems i and j

$$C_{ij} \equiv \overline{\Delta n_i \Delta n_j} = \overline{n_i n_j} - \bar{n}_i \bar{n}_j,$$

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad C_{ii} = D_i, \quad D = \sum_{i,j=1}^2 C_{ij},$$

$$C = C_{12} + C_{21} = 2C_{12}. \quad (2)$$

The dispersion of particles number (1) for system with overlapping particles wave functions sums of dispersions of subsystems and correlations between them. At mental division of system on N parts it is received

$$D = \sum_{i,j=1}^N C_{ij} = \sum_{i=1}^N D_i + C, \quad C = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N C_{ij} = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N C_{ij}. \quad (3)$$

2. Fermions

System of fermions in an equilibrium thermal state it is divided mentally on two parts $n = n_1 + n_2$. Using dispersion $D_F = \bar{n}(1 - \bar{n})$, we find

$$D_F = (\bar{n}_1 + \bar{n}_2)(1 - \bar{n}_1 - \bar{n}_2) = D_1 + D_2 - 2\bar{n}_1\bar{n}_2.$$

Comparison with (1) and (2) gives $(C_F)_{12} = -\bar{n}_1\bar{n}_2 < 0$. For $N \geq 2$ at $i \neq j$ it is similarly received

$$(C_F)_{ij} \equiv \overline{n_i n_j} - \bar{n}_i \bar{n}_j = -\bar{n}_i \bar{n}_j < 0, \quad \overline{n_i n_j} = 0.$$

In equilibrium gas of fermions the fluctuation of particles number in different parts of state are anticorrelated. The result is caused by the Pauli exclusion principle and means repulsion of fermions in identical states.

3. Coherent radiation

Radiation of one mode laser is coherent and a field is a sinusoidal wave. The probability of detection in one state n photons, as well as particles of classical gas, is described by Puasson distribution for independent particles with dispersion $D_M = \bar{n}$. At mental division of particles on N parts $\bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \dots + \bar{n}_N$ it is received

$$D_M = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \dots + \bar{n}_N = D_1 + D_2 + \dots + D_N.$$

Comparison with (3) shows absence of correlation

$$(C_M)_{ij} \equiv \overline{n_i n_j} - \bar{n}_i \bar{n}_j = 0, \quad \overline{n_i n_j} = \bar{n}_i \bar{n}_j,$$

where $i \neq j$. Hence, in coherent radiation and in classical gas there is no bunching or antibunching of particles.

4. Bosons

For bosons it is used $D_B = \bar{n}^2 + \bar{n}$, then at $N = 2$

$$D_B = (\bar{n}_1 + \bar{n}_2)^2 + \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = D_1 + D_2 + 2\bar{n}_1\bar{n}_2.$$

Comparison with (1) and (2), gives $(C_B)_{12} = \bar{n}_1\bar{n}_2 > 0$. For $N \geq 2$ at $i \neq j$ it is similarly received

$$(C_B)_{ij} \equiv \overline{n_i n_j} - \bar{n}_i \bar{n}_j = \bar{n}_i \bar{n}_j > 0, \quad \overline{n_i n_j} = 2\bar{n}_i \bar{n}_j.$$

Hence, in equilibrium gas of bosons the fluctuation of particles number in different parts of a state are correlated proportionally doubled product of average values of these numbers. The result is inverse to action of the Pauli exclusion principle and means mutual «interference attraction» of bosons, that bosons move groups in equilibrium gas. Experiment of R. Henberi Brown and R.Tviss [1] has shown that in thermal radiation the pairs of photons, divided by a smaller time interval, are registered more often, than pairs with the big interval. The photon bunching of thermal radiation leads to that a state of photon gas is the wave with a coherence length $\sim \lambda/2$.

5. Attractive and repulsive forces

The power nature of «interference interactions» proves to be true comparison internal energy of quantum systems and classical gas. For three-dimensional

quantum gas with N particles at temperature T with chemical potential μ the internal energy

$$U_{\delta}(T) \cong \frac{3}{2} kTN \left(1 + \frac{\delta}{2^{2/5}} e^{\mu_{\delta}/kT} \right).$$

At gas of fermions with $\delta = 1$ internal energy is more than at classical gas with $\delta = 0$, and at gas of bosons with $\delta = -1$ internal energy is less than at classical gas, because of mutual «interference interactions» of quantum particles.

At a volume variation of gas of bosons at temperature below a threshold of condensation $T < T_C$ with weight of a particle m and number of spin states N_s it is received

$$\frac{f_{B,x}}{S} = - \left(\frac{dU}{dV} \right)_{T,N} = -630 \frac{h^2}{mN_s^{2/3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \left(\frac{T}{T_C} \right)^{5/2} < 0.$$

For gas of fermions with number of particles N at temperature $T \rightarrow 0$ it is carried out

$$\frac{f_{F,x}}{S} = - \left(\frac{dU}{dV} \right)_{T,N} = \frac{1}{20,6} \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} > 0.$$

At isothermal increase of volume the internal energy increases if between particles of system there is attractive force $f_{B,x} < 0$; internal energy decreases if there is repulsive force $f_{F,x} > 0$. For electronic gas with $N/V \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$ it is received $f_F/S \sim 10^9 \text{ N/m}^2$. For gas of atoms ^4He at $T = T_C$, $N/V \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ it is found $f_B/S \sim 10^{-4} \text{ N/m}^2$.

6. Bunching and antibunching effects

Results correspond with experiment [2]. Boson atoms ^4He and fermion atoms ^3He at temperature $\sim 10^{-6} \text{ K}$ extended in the form of a cloudlet from magnetic traps and were registered by detectors, placed from each other on distance Δz along a movement direction. It was measured the correlation function $g^{(2)}(\Delta z)$, that is, the probability of joint detection at two points separated by Δz , divided by the product of the single detection probabilities at each point. In the absence of correlation arrival of particles is accidental and from the theorem of product of independent events probabilities is received $g^{(2)}(\Delta z) = 1$. The correlation functions $g_{B/F}^{(2)}(\Delta z)$ shown in Figure. The bosons show a bunching effect, and the fermions show antibunching at distances between particles smaller 1 mm. Results are described by function

$$g^{(2)}(\Delta z) = 1 \pm \eta e^{-(\Delta r)^2/l^2}.$$

At gas temperature $T = 0,5 \mu\text{K}$ parameter of contrast $\eta \sim (0,03 - 0,08)$, correlation lengths $l_B = 0,56 \text{ мм}$, $l_F = 0,75 \text{ мм}$. Parameters η and l increase at temperature fall.

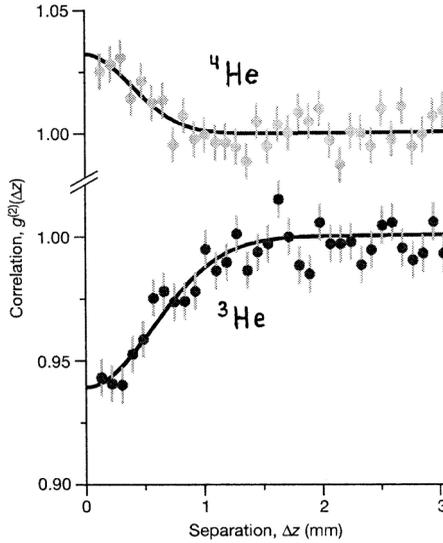


Figure. Correlation functions for bosons ^4He and fermions ^3He

Корреляция числа частиц в равновесном тепловом состоянии квантового газа вызвана взаимным «интерференционным отталкиванием» и антигруппировкой у фермионов и «интерференционным притяжением» и группировкой у бозонов.

Корреляция числа частиц. Систему из n частиц, находящихся в одном состоянии, мысленно разделяем на две подсистемы $i = 1, 2$

$$n = n_1 + n_2, \quad \bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2.$$

Используя отклонение от среднего $\Delta n_i \equiv n_i - \bar{n}_i$, находим дисперсию числа

частиц в подсистеме $D_i \equiv \overline{(\Delta n_i)^2} = \overline{n_i^2} - \bar{n}_i^2$, и во всей системе

$$D \equiv \overline{(n - \bar{n})^2} = \overline{[(n_1 - \bar{n}_1) + (n_2 - \bar{n}_2)]^2} = D_1 + D_2 + C, \quad (1)$$

где корреляции между флуктуациями числа частиц в подсистемах i и j

$$C_{ij} \equiv \overline{\Delta n_i \Delta n_j} = \overline{n_i n_j} - \bar{n}_i \bar{n}_j,$$

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad C_{ii} = D_i, \quad D = \sum_{i,j=1}^2 C_{ij},$$

$$C = C_{12} + C_{21} = 2C_{12}. \quad (2)$$

Дисперсия числа частиц (1) для системы с перекрывающимися волновыми функциями частиц складывается из дисперсий подсистем и корреляций между ними. При мысленном разделении системы на N частей получаем

$$D = \sum_{i,j=1}^N C_{ij} = \sum_{i=1}^N D_i + C, \quad C = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N C_{ij} = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N C_{ij}. \quad (3)$$

Систему фермионов в состоянии теплового равновесия разделяем мысленно на две части $n = n_1 + n_2$. Используя дисперсию $D_F = \bar{n}(1 - \bar{n})$, находим

$$D_F = (\bar{n}_1 + \bar{n}_2)(1 - \bar{n}_1 - \bar{n}_2) = D_1 + D_2 - 2\bar{n}_1\bar{n}_2.$$

Сравнение с (1) и (2) дает $(C_F)_{12} = -\bar{n}_1\bar{n}_2 < 0$. Для $N \geq 2$ при $i \neq j$ аналогично получаем

$$(C_F)_{ij} \equiv \overline{n_i n_j - \bar{n}_i \bar{n}_j} = -\bar{n}_i \bar{n}_j < 0, \quad \overline{n_i n_j} = 0.$$

Следовательно, **в равновесном фермионном газе флуктуации числа частиц в разных частях состояния антикоррелированы**. Результат вызван принципом запрета Паули и означает **взаимное «отталкивание» фермионов в тождественных состояниях**.

Излучение одномодового лазера когерентное, поле близко к синусоидальной волне. Вероятность обнаружения в одном состоянии n фотонов, как и частиц классического газа, описывается распределением Пуассона для независимых частиц с дисперсией $D_M = \bar{n}$. При мысленном разделении частиц на N частей $\bar{n} = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \dots + \bar{n}_N$ получаем

$$D_M = \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \dots + \bar{n}_N = D_1 + D_2 + \dots + D_N.$$

Сравнение с (3) показывает отсутствие корреляции

$$(C_M)_{ij} \equiv \overline{n_i n_j - \bar{n}_i \bar{n}_j} = 0, \quad \overline{n_i n_j} = \bar{n}_i \bar{n}_j,$$

где $i \neq j$. Следовательно, **в когерентном излучении и в классическом газе не происходит группировки или антигруппировки частиц**.

Для бозонов используем $D_B = \bar{n}^2 + \bar{n}$, тогда при $N = 2$

$$D_B = (\bar{n}_1 + \bar{n}_2)^2 + \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = D_1 + D_2 + 2\bar{n}_1\bar{n}_2.$$

Сравниваем с (1) и (2), находим $(C_B)_{12} = \bar{n}_1\bar{n}_2 > 0$. Для $N \geq 2$ при $i \neq j$ аналогично получаем

$$(C_B)_{ij} \equiv \overline{n_i n_j - \bar{n}_i \bar{n}_j} = \bar{n}_i \bar{n}_j > 0, \quad \overline{n_i n_j} = 2\bar{n}_i \bar{n}_j.$$

Следовательно, **в равновесном бозонном газе флуктуации числа частиц в разных частях состояния коррелированы пропорционально удвоенному**

произведению средних значений этих чисел. Результат обратный действию принципа Паули и означает **взаимное «интерференционное притяжение» бозонов, то есть при тепловом равновесии бозоны перемещаются группами.** Эксперименты Р. Хэнбери Брауна и Р. Твисса [1] показали, что в тепловом излучении пары фотонов, разделенные меньшим временным интервалом, регистрируются чаще, чем пары с большим интервалом. Группировка фотонов теплового излучения приводит к тому, что состоянием фотонного газа является волна с длиной когерентности $\sim \lambda/2$.

Силовая природа корреляционных взаимодействий подтверждается сравнением внутренних энергий квантовых систем и классического газа. Для слабо вырожденного трехмерного квантового газа из N частиц при температуре T с химическим потенциалом μ выполняется

$$U_{\delta}(T) \cong \frac{3}{2} kTN \left(1 + \frac{\delta}{2^{2/5}} e^{\mu_{\delta}/kT} \right).$$

У фермионного газа с $\delta = 1$ внутренняя энергия больше, чем у классического газа с $\delta = 0$, а у бозонного газа с $\delta = -1$ внутренняя энергия меньше, из-за взаимного «интерференционного взаимодействия» квантовых частиц.

При вариации объема бозонного газа при температуре ниже порога конденсации $T < T_C$ с массой частицы m и числом спиновых состояний N_S получаем

$$\frac{f_{B,x}}{S} = - \left(\frac{dU}{dV} \right)_{T,N} = -630 \frac{h^2}{mN_S^{2/3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} \left(\frac{T}{T_C} \right)^{5/2} < 0.$$

Для газа фермионов с числом частиц N при температуре $T \rightarrow 0$ выполняется

$$\frac{f_{F,x}}{S} = - \left(\frac{dU}{dV} \right)_{T,N} = \frac{1}{20,6} \frac{h^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3} > 0.$$

При изотермическом увеличении объема внутренняя энергия системы возрастает, если между частицами действует сила притяжения $f_{B,x} < 0$; внутренняя энергия уменьшается, если действует сила отталкивания $f_{F,x} > 0$. Для электронного газа с $N/V \sim 10^{28} \text{ м}^{-3}$ получаем $f_F/S \sim 10^9 \text{ Н/м}^2$. Для газа атомов ${}^4\text{He}$ при $T = T_C$, $N/V \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$ находим $f_B/S \sim 10^{-4} \text{ Н/м}^2$.

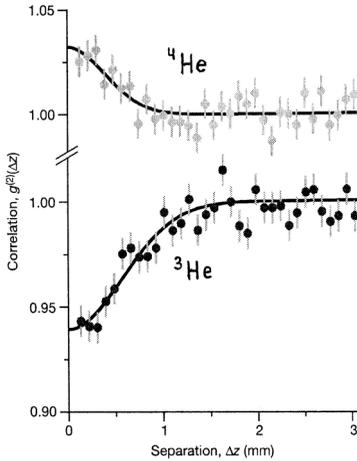


Рис. 1. Зависимость корреляционной функции бозонов ${}^4\text{He}$ и фермионов ${}^3\text{He}$ от расстояния между детекторами

Результаты согласуются с экспериментом [2]. Атомы бозоны ${}^4\text{He}$ и атомы фермионы ${}^3\text{He}$ при температуре $\sim 10^{-6}$ К распространялись в виде облачка от магнитных ловушек и регистрировались детекторами, отстоящими друг от друга на расстояние Δz вдоль направления движения. Измерялась **корреляционная функция** $g^{(2)}(\Delta z)$, равная вероятности одновременной регистрации частиц двумя детекторами, деленная на произведение вероятностей регистрации частиц каждым детектором по отдельности. При отсутствии корреляции приход частиц случаен и из теоремы о произведении вероятностей независимых событий получаем $g^{(2)}(\Delta z) = 1$. Корреляционные

функции $g_{B/F}^{(2)}(\Delta z)$, показанные на рис. 1, свидетельствуют о **группировке бозонов и антигруппировке фермионов** при расстояниях между частицами меньших 1 мм.

Аналогичная зависимость получена в плоскости x - y . Корреляционные эффекты возникают при перекрытии волновых функций частиц и вызваны особенностями их симметрии при взаимной перестановке. Результаты описывает функция

$$g^{(2)}(\Delta z) = 1 \pm \eta e^{-(\Delta r)^2/l^2}.$$

При температуре газа $T = 0,5$ мК параметр контрастности $\eta \sim (0,03 - 0,08)$, корреляционная длина $l_B = 0,56$ мм, $l_F = 0,75$ мм. Параметры η и l увеличиваются при понижении температуры.

Список литературы

1. Hanbury Brown R., Twiss R.Q. Correlation between photons in two coherent beams of light // Nature **177**, 27–29 (1956).
2. Jelts T. at al. Comparison of the Hanbury Brown–Twiss effect for bosons and fermions // Nature **445**, 402–405 (2007).

Материал поступил в редколлегию 17.09.19.